

Sintesi circuitale ultra-veloce di controllori MPC basata su approssimazioni lineari a tratti

Alberto Oliveri^(), Tomaso Poggi^(*), Marco Storace^(*), Alberto Bemporad^(**)*

^(*) Università di Genova, Dipartimento di Ingegneria Biofisica ed Elettronica
Via Opera Pia 11A, 16145 Genova

^(**) Università di Trento, Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Strutturale
Via Mesiano 77, 38100 Trento

Questo filone di attività di ricerca rientra nell'ambito del progetto europeo MOBY-DIC, "MOdel-Based sYnthesis of DIgital electronic Circuits for embedded control" (Project n. FP7-INFSo-ICT-248858, <http://www.mobydic-project.eu>).

La tecnica MPC (Model Predictive Control) sta assumendo un ruolo sempre più significativo in ambito industriale, per il controllo in retroazione di sistemi a più variabili a tempo discreto soggetti a vincoli sullo stato e sugli ingressi. Nell'MPC, ad ogni istante di campionamento, viene eseguita un'ottimizzazione vincolata (i vincoli possono rappresentare valori di saturazione sul controllo o intervalli di ammissibilità per stato e uscite), risolvendo un problema di controllo ottimo ad anello aperto su un orizzonte temporale finito. Soluzione del problema di ottimizzazione è una sequenza di controlli ottimi composta da un numero di valori dipendente dall'orizzonte temporale impostato. Di tale sequenza, soltanto il primo elemento viene applicato per il controllo del sistema e, all'istante di campionamento successivo, viene risolto un nuovo problema di ottimizzazione, a partire dal nuovo vettore di stato.

Per ovviare all'elevato onere computazionale imposto da questo metodo, negli ultimi anni sono state sviluppate tecniche MPC *esplicite* [1,2], in grado di calcolare la legge di controllo off-line per ogni valore dello stato e convertirla in una funzione lineare a tratti (Piecewise-Affine, PWA). In questo modo, le operazioni da effettuare on-line ad ogni istante di campionamento si riducono al calcolo di un'opportuna funzione lineare (su una porzione del dominio).

Benché adottata con successo in numerose applicazioni pratiche, la tecnica MPC esplicita tende a generare funzioni PWA costituite da un vasto insieme di leggi di controllo lineari definite su partizioni (politopi) del dominio. In tal caso, molti politopi hanno dimensioni estremamente ridotte. Pertanto, per semplificare la complessità dei controllori MPC espliciti, si stanno recentemente sviluppando tecniche finalizzate a ottenere funzioni di controllo MPC approssimate [3,4].

In [4], a questo scopo, si utilizza una speciale classe di funzioni PWA, definite su un dominio partizionato in politopi regolari detti semplici e indicate come funzioni PWAS [5], per approssimare un dato controllore MPC e imporre vincoli nella procedura di approssimazione in modo da poter analizzare le proprietà di stabilità ad anello chiuso mediante una funzione di Lyapunov PWA.

La scelta di funzioni PWAS presenta notevoli vantaggi dal punto di vista della realizzazione circuitale, dato che sono disponibili circuiti [6] in grado di calcolare tali funzioni in tempi brevissimi, dell'ordine delle decine di nanosecondi.

Ogni funzione PWAS può essere espressa mediante una somma pesata di funzioni base $\varphi_k(x)$, una per ogni vertice della partizione simpliciale (costituita da N_v vertici in tutto), in questo modo:

$$\hat{u}(x) = \sum_{k=1}^{N_v} w_k \varphi_k(x)$$

Una volta scelta la partizione e il tipo di funzioni base da utilizzare, una funzione PWAS è univocamente definita dal vettore di pesi w . Nel nostro problema tali pesi sono ottenuti minimizzando la distanza, secondo una certa norma, tra il controllore ottimo MPC $u^*(x)$ e la funzione PWAS approssimante $\hat{u}(x)$:

$$\min_{w_k} \|u^*(x) - \sum_{k=1}^{N_s} w_k \varphi_k(x)\|$$

La minimizzazione è soggetta agli stessi vincoli (su ingressi, stati e uscite del sistema) utilizzati per ottenere il controllore ottimo MPC. La stabilità del sistema ad anello chiuso in cui viene utilizzato il controllo approssimato è garantita a posteriori ricavando una funzione di Lyapunov PWA.

La figura 1 mostra l'andamento degli ingressi (u) e delle uscite (y) del seguente sistema lineare tridimensionale

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 1 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} u_k \quad y_k = [1 \ 0 \ 0] x_k$$

controllato sia con la funzione di controllo ottima MPC (rappresentata in grigio) sia con quella approssimata (linee tratteggiate e punteggiate, corrispondenti all'utilizzo di 2 diverse norme nell'ottimizzazione).

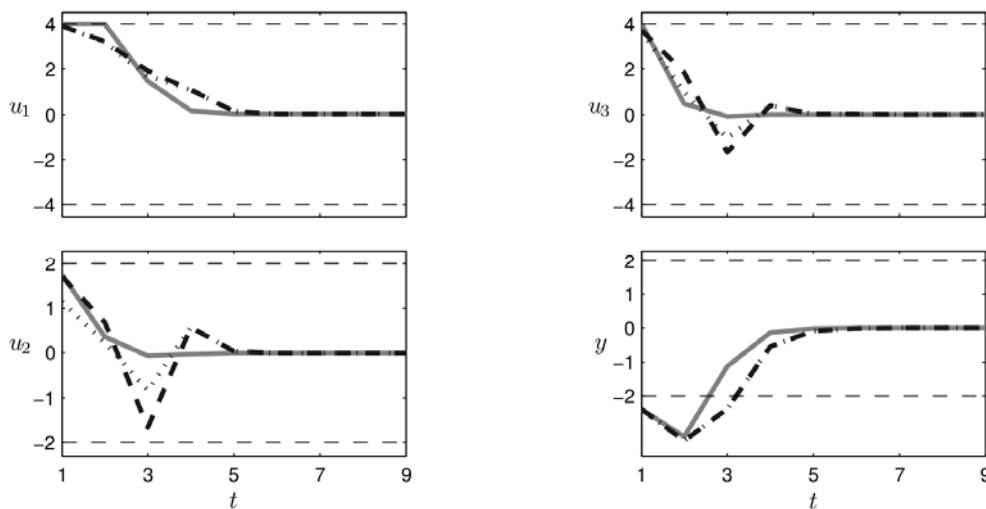


Figura 1

La funzione di controllo ottima può essere calcolata circuitalmente con l'architettura proposta in [7] in un tempo medio pari a 492 ns, mentre per la funzione approssimata occorrono solo 190 ns e 48 ns con le due architetture proposte in [6].

Riferimenti bibliografici:

- [1] A. Alessio and A. Bemporad, "A survey on explicit model predictive control," in *Nonlinear Model Predictive Control: Towards New Challenging Applications*, D. R. L. Magni, F. Allgower, Ed., vol. 384. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009, pp. 345–369.
- [2] A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, and E. Pistikopoulos, "The explicit linear quadratic regulator for constrained systems," *Automatica*, vol. 38, no. 1, pp. 3–20, 2002.
- [3] A. Bemporad and C. Filippi, "Suboptimal explicit receding horizon control via approximate multiparametric quadratic programming," *J. Opt. Th. Appl.*, vol. 117, no. 1, pp. 9–38, 2003.
- [4] A. Bemporad, A. Oliveri, T. Poggi, M. Storace, "Ultra-Fast Stabilizing Model Predictive Control via Canonical Piecewise Affine Approximations" *IEEE Trans. on Aut. Control*, in corso di stampa.
- [5] M. Storace, L. Repetto, and M. Parodi, "A method for the approximate synthesis of cellular non-linear networks – Part 1: Circuit definition," *Int. J. Circ. Th. Appl.*, vol. 31, no. 3, pp. 277–297, 2003.
- [6] M. Storace and T. Poggi, "Digital architectures realizing piecewise-linear multi-variate functions: two FPGA implementations," *Int. J. Circ. Th. Appl.*, vol. 39, pp. 1-15, 2011
- [7] A. Oliveri, A. Oliveri, T. Poggi, and M. Storace, "Circuit implementation of piecewise-affine functions based on a binary search tree," in *Proc. of ECCTD'09*, Antalya, Turkey, Aug. 2009, pp. 145–148.